



MINISTERUL
EDUCAȚIEI ȘI
CERCETĂRII



Olimpiada Națională de Matematică
Etapă Locală, Județul Dolj, 7 februarie 2026
CLASA a XI-a

Subiectul 1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calculați A^{2026} .

b) Determinați numerele naturale n pentru care

$$\frac{1}{3}s(A^n) = 2026 + s(A - I_3) \cdot \det A^* + 4 \cdot \det A,$$

unde $s(X)$ reprezintă suma elementelor matricei X .

Prof. Popescu Luminița

Subiectul 2. Fie $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, o funcție care satisface relația $f(x) \cdot e^{f(x)} = x$, pentru orice $x \in [0, +\infty)$. Arătați că:

a) f este monotonă;

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$;

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\ln x} = 1$.

Prof. Rădulescu Teodora

Subiectul 3. Fie $a, b \in \mathbb{N}^*$ care verifică $a^2 - b = 1$. Determinați:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n - \sum_{k=1}^n \left\{ (a + \sqrt{b})^k \right\} \right).$$

Gazeta matematică

Subiectul 4. Determinați matricele $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{N})$, care verifică ecuația

$$A^4 - 7A^3 + 14A^2 + 2A - 20I_2 = O_2.$$

Prof. Popescu Luminița

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare problemă se va nota de la 0 la 21 puncte.

Se acordă 16 puncte din oficiu

Timp de lucru: 3 ore



Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Locală, Județul Dolj, 07 februarie 2026
CLASA a XI-a - Soluții și bareme

Subiectul 1.	
a) $A^2 = \begin{pmatrix} 2^2 & 0 & 2^3 - 2 \\ 0 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$	3p
Demonstrăm prin inducție că $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 2^{n+1} - 2 \\ 0 & 1 & 6n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, deci	3p
$A^{2026} = \begin{pmatrix} 2^{2026} & 0 & 2^{2027} - 2 \\ 0 & 1 & 12156 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	
b) $s(A^n) = 3 \cdot 2^n + 6n$	3p
$s(A - I_3) = s(A) - s(I_3) = 9$	3p
$\det A = 2$	3p
$A^* = \det A \cdot A^{-1}$, deci $\det A^* = (\det A)^3 \cdot \det A^{-1} = (\det A)^2 = 4$	3p
Ecuția devine $2^n + 2n = 2070$ (1)	3p
Funcția $f(x) = 2^x + 2x$, $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ este strict crescătoare, deci ecuația (1) are cel mult o soluție. $n = 11$ soluție.	
Problema 2.	
a) Din ipoteză avem $f(x) = x \cdot e^{-f(x)} \geq 0, \forall x \geq 0.$	2p
Fie $u_1, u_2 \in [0, \infty)$, $u_1 < u_2$ pentru care $f(u_1) \geq f(u_2)$, atunci: $e^{-f(u_1)} \leq e^{-f(u_2)}$ și $f(u_1) = u_1 \cdot e^{-f(u_1)} < u_2 \cdot e^{-f(u_1)} \leq u_2 \cdot e^{-f(u_2)} = f(u_2)$, contradicție.	3p
Prin urmare, funcția f este strict crescătoare pe $[0, +\infty)$.	1p
b) Dacă f este mărginită superior există $M > 0$ pentru care $f(x) < M, \forall x \geq 0.$	2p
Fie $x_M = M \cdot e^M \geq 0$. Atunci $x_M = f(x_M) \cdot e^{f(x_M)} < M \cdot e^M = x_M$ contradicție, deci f este nemărginită superior.	6p
Funcția f este strict crescătoare pe $[0, +\infty)$ și nemărginită, deci $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty.$	1p
c) $\frac{\ln x}{f(x)} = \frac{\ln(f(x) \cdot e^{f(x)})}{f(x)} = 1 + \frac{\ln f(x)}{f(x)}$	3p
$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln f(x)}{f(x)} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\ln y}{y} = 0$, deci $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{f(x)} = 1 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\ln x}.$	3p
Subiectul 3.	
$(a + \sqrt{b})(a - \sqrt{b}) = a^2 - b = 1$, de unde $a - \sqrt{b} < 1 < a + \sqrt{b}.$	3p



<p>Dar $(a + \sqrt{b})^k + (a - \sqrt{b})^k \in \mathbb{Z}$, adică $\left[(a + \sqrt{b})^k\right] + \left[(a - \sqrt{b})^k\right] + \{(a + \sqrt{b})^k\} + \{(a - \sqrt{b})^k\} \in \mathbb{Z}$. Deoarece $(a - \sqrt{b})^k \in (0,1) \Rightarrow \left[(a - \sqrt{b})^k\right] = 0$ și $(a - \sqrt{b})^k = \{(a - \sqrt{b})^k\}$.</p> <p>Obținem că $\{(a + \sqrt{b})^k\} + \{(a - \sqrt{b})^k\} = 1$.</p> <p>Deci $n - \sum_{k=1}^n \{(a + \sqrt{b})^k\} = \sum_{k=1}^n \{(a - \sqrt{b})^k\} = \sum_{k=1}^n (a - \sqrt{b})^k$</p> <p>iar $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n - \sum_{k=1}^n \{(a + \sqrt{b})^k\}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n (a - \sqrt{b})^k\right)$</p> $= \lim_{n \rightarrow \infty} \left((a - \sqrt{b}) \cdot \frac{(a - \sqrt{b})^n - 1}{(a - \sqrt{b}) - 1}\right) = \frac{a - \sqrt{b}}{1 - a + \sqrt{b}} = \frac{a - 1 - \sqrt{b}}{2(1 - a)}$	<p>6p</p> <p>3p</p> <p>3p</p> <p>6p</p>
Problema 4.	
<p>Cazul I. Dacă $A = \lambda I_2$, atunci λ este soluție a ecuației $\lambda^4 - 7\lambda^3 + 14\lambda^2 + 2\lambda - 20 = 0$.</p> <p>Dar $\lambda^4 - 7\lambda^3 + 14\lambda^2 + 2\lambda - 20 = (\lambda + 1)(\lambda - 2)(\lambda^2 - 6\lambda + 10)$, deci $\lambda = -1$ sau $\lambda = 2$.</p>	3p
Dacă $\lambda = -1$ atunci $A = -I_2 \notin \mathcal{M}_2(\mathbb{N})$	1p
Dacă $\lambda = 2$ atunci $A = 2I_2 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{N})$.	1p
Cazul II. $A \neq \lambda I_2$. Dacă $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{N})$ atunci $A^2 - \text{tr}(A) \cdot A + \det A \cdot I_2 = O_2$	3p
<p>Deoarece $x^4 - 7x^3 + 14x^2 + 2x - 20 = (x^2 - \text{tr}(A) \cdot x + \det A)p(x) + \alpha x + \beta$, dacă A este soluție a ecuației, atunci</p> <p>$A^4 - 7A^3 + 14A^2 + 2A - 20I_2 = (A^2 - \text{tr}(A) \cdot A + \det A \cdot I_2)p(A) + \alpha A + \beta I_2 = O_2$ și de aici $\alpha A + \beta I_2 = O_2$,</p>	3p
Dacă $\alpha \neq 0$, atunci $A = \lambda I_2$ contradicție.	1p
<p>Dacă $\alpha = 0$, atunci $\beta = 0$ și $(x + 1)(x - 2)(x^2 - 6x + 10) = (x^2 - \text{tr}(A) \cdot x + \det A)p(x)$. Deci $x^2 - \text{tr}(A) \cdot x + \det A = x^2 - 6x + 10$ sau $x^2 - \text{tr}(A) \cdot x + \det A = x^2 - x - 2$.</p>	2p
<p>Dacă $x^2 - \text{tr}(A) \cdot x + \det A = x^2 - 6x + 10$ atunci $\text{tr}(A) = a + d = 6$ și $\det A = ad - bc = 10$. Deoarece $a, b, c, d \in \mathbb{N}$, avem $10 = ad - bc \leq ad \leq \left(\frac{a+d}{2}\right)^2 = 9$, imposibil.</p>	3p
<p>Dacă $x^2 - \text{tr}(A) \cdot x + \det A = x^2 - x - 2$, atunci $\text{tr}(A) = a + d = 1$ și $\det A = ad - bc = -2$. Deoarece $a, b, c, d \in \mathbb{N}$, avem $a = 1, d = 0, bc = 2$ de unde $A \in \left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\right\}$ sau $a = 0, d = 1, bc = 2$ de unde $A \in \left\{\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\right\}$</p>	3p



MINISTERUL
EDUCAȚIEI ȘI
CERCETĂRII



Deci $A \in \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

1p



Dacă $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{N})$ atunci $A^2 - \text{tr}(A) \cdot A + \det A \cdot I_2 = O_2$	
<p>Dacă A este soluție a ecuației atunci</p> <p>$A^4 - 7A^3 + 14A^2 + 2A - 20I_2 = (A^2 - \text{tr}(A) \cdot A + \det A \cdot I_2)B + \alpha A + \beta I_2 = O_2$ și de aici $\alpha A + \beta I_2 = O_2$,</p>	4p
Dacă $\alpha \neq 0$, atunci $A = \lambda I_2$, iar λ este soluție a ecuației $\lambda^4 - 7\lambda^3 + 14\lambda^2 + 2\lambda - 20 = 0$. Dar $\lambda^4 - 7\lambda^3 + 14\lambda^2 + 2\lambda - 20 = (\lambda + 1)(\lambda - 2)(\lambda^2 - 6\lambda + 10)$, deci $\lambda = -1$ sau $\lambda = 2$.	
Dacă $\lambda = -1$ atunci $A = -I_2 \notin \mathcal{M}_2(\mathbb{N})$	
Dacă $\lambda = 2$ atunci $A = 2I_2 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{N})$.	
Dacă $\alpha = 0$ atunci $\beta = 0$ și $(A + I_2)(A - 2I_2)(A^2 - 6A + 10I_2) = (A^2 - \text{tr}(A) \cdot A + \det A \cdot I_2)B$. Avem $A^2 - \text{tr}(A) \cdot A + \det A \cdot I_2 = A^2 - 6A + 10I_2$ sau $A^2 - \text{tr}(A) \cdot A + \det A \cdot I_2 = A^2 - A - 2I_2$	
<p>Dacă $A^2 - \text{tr}(A) \cdot A + \det A \cdot I_2 = A^2 - 6A + 10I_2$ atunci $\text{tr}(A) = 6$ și $\det A = 10$.</p> <p>Deoarece $a, b, c, d \in \mathbb{N}$, avem $10 = ad - bc \leq ad \leq \left(\frac{a+d}{2}\right)^2 = 9$ imposibil.</p>	